TD3. Probabilité.

21/05/2021

Exercice 1.

Idée, ... échec, succès

avec $q = 1-p$ et p probabilité : $P(X=k) = q^{k-1} p$

Loi géométrique.

$\Rightarrow$ Si N le nbr des parties joué

l'événement $\{N=n\}, n \in \mathbb{N}^*$ signifie que le joueur a perdu les $n-1$ premières parties et son numéro a sorti à la dernière.

Cette variable aléatoire N suit une loi géométrique de paramètre p : $X \sim G(p)$

$$P(N=n) = q^{n-1} p$$

A l'issue de ses parties, le joueur reçoit k fois sa mise,

Soit $k 2^{n-1} a$ après avoir misé au cours de ses parties.

$$a + 2a + 2^2 a + \dots + 2^{n-1} a = a(1+2+2^2+\dots+2^{n-1})$$
$$= a(2^n - 1)$$

Son gain est alors :

$$g_n = k 2^{n-1} a - a(2^n - 1)$$
$$= k 2^{n-1} a - 2^n a + a$$

$$\boxed{g_n = a + 2^{n-1} a (k-2)}$$

• Calculons l'espérance mathématique du gain G :

$$X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$$

$$E(X) = \sum_{i \in I} x_i P(X = x_i)$$

- $E(G) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n P(N=n)$ $\quad q = 1-p \leq 1$

• l'espérance du gain G de ce joueur est :

$$E(G) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n P(N=n)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (a + 2^{n-1} a (k-1)) q^{n-1} p$$
$$= ap \sum_{n=1}^{\infty} (q^{n-1} + (k-2)(2q)^{n-1})$$
$$= ap \sum_{n=0}^{\infty} (q^n + (k-2)(2q)^n)$$

- Si $q \geq \frac{1}{2}$:

Alors le terme général de la série ne tend pas vers 0, donc la série est divergente.

Donc l'espérance est l'infini.

- Si $q < \frac{1}{2}$

On a $E(G) = ap \sum_{n=0}^{\infty} q^n + ap(k-2) \sum_{n=0}^{\infty} (2q)^n$

$$= ap \times \frac{1}{1-q} + ap(k-2) \times \frac{1}{1-2q}$$
$$= ap \times \frac{1}{p} + ap(k-2) \frac{1}{1-2(1-p)}$$
$$= a + \frac{ap(k-2)}{2p-1}$$
$$= a \times \frac{2p-1+kp-2p}{2p-1}$$

$$\boxed{E(G) = a \times \frac{kp-1}{2p-1}}$$ Si $k=2$, alors $E(G) = a$

Exercice 2.

Loi hyper-géométrique.

$$X \sim H(10, 3, \tfrac{4}{10})$$

$$P(X=k) = \frac{C_4^k C_6^{3-k}}{C_{10}^3}$$

1) Calculons les probabilités des différentes valeurs possibles de X.

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$$

• $P(X=0) = \frac{C_4^0 C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}$

• $P(X=1) = \frac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{2}$

- $P(X=2) = \frac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{10}$

- $P(X=3) = \frac{C_4^3 C_6^0}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}$

4) En déduire $E(X)$.

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \, P_i$$

$$E(X) = 0\times P(X=0) + 1\times P(X=1) + 2\times P(X=2) + 3\times P(X=3)$$

$$= 0\times\frac{1}{6} + 1\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{3}{10} + 3\times\frac{1}{30}$$

$$E(X) = \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{1}{10} = 1,2$$

Remarque

L'espérance par le théorème:

Pour la loi hyper-géométrique.

$E(X) = np$

On a $X \sim H(10, 3, 4/10)$

$$E(X) = 3\times\frac{4}{10} = \frac{12}{10} = 1,2$$

Exercice 3: $X \sim B(n,p)$

$$P(X=k) = C_n^k \, p^k q^{n-k} \text{ avec } q = 1-p$$

Soit $X \sim B(20, 0,1)$

1) Calculer les probabilités suivantes:

- $P(X=5) = C_{20}^5 \cdot (0,1)^5 \cdot (0,9)^{15}$

$$P(X=5) = \frac{20!}{5!\,15!} \cdot \frac{1^5}{10^5} \cdot \frac{9^{15}}{10^{15}}$$

$$\boxed{P(X=5) = 0,032}$$

- $P(X\le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$= \cancel{C_{20}^0 \, p \, q}$

$C_{20}^0 (0,1)^0 (0,9)^{20} + C_{20}^1 (0,1)^1 (0,9)^{19}$

$+ C_{20}^2 (0,1)^2 (0,9)^{18} = 0,68$

$X(\Omega) = \mathbb{N}$

- $P(X=1,5) = 0$

$= P(\emptyset)$

car $1,5 \notin X(\Omega) = \mathbb{N}$

- $P(3 \le X \le 4) = P(X=3) + P(X=4)$

$= C_{20}^3 (0,1)^3 (0,9)^{17} + C_{20}^4 (0,1)^4 (0,9)^{16}$

$$\boxed{= 0,28}$$

2) Calculons $P_q(X=15)$ où $p = 0,9$

$P(X=k) = C_{20}^{15} (0,9)^{15} \cdot (0,1)^5$

$$P_q(X=n-k) = C_n^{n-k} \, q^{n-k} \, p^k = C_n^k \, p^k \, q^{n-k}$$

$$P_{0,9}(X=15) = P_{0,9}(X = 20-5) = P_{0,1}(X=5) \simeq 0,032$$

Exercice 4.

Soit $X \sim P(5)$ loi de poisson

$X(\Omega) = \mathbb{N}$

1) Calculons $P(X=6)$:

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

- $P(X=6) = e^{-5} \cdot \frac{5^6}{6!} = 0,1462$

- $P(X<4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$

$= e^{-5}\left(\frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!}\right)$

$$\boxed{= 0,2650}$$

2) Calculer $P(X \ge 5)$

$P(X\ge 5) = 1 - P(X<5)$

$= 1 - (P(X<4) + P(X=4))$

4). Déterminer la fct de répartition F_x.

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 5 \\ 3/52 & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ 4/52 & \text{si } 6 \leq x < 7 \\ 7/52 & \text{si } 7 \leq x < 8 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \text{si } x \geq 16 \end{cases}$$

5). Calculer le mode md.

(Le mode est la valeur de variable qui a le plus grand effectif).

On a : $n_{max} = 8$

Donc $md = 11$ et $md = 12$.

Calculer la moyenne arithmétique $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} n_i x_i \qquad N = 52, \ n = 12$$

Donc $$\bar{x} = \frac{1}{52} \sum_{i=1}^{12} n_i x_i$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{52} (5\times3 + 6\times1 + 7\times3 + 8\times4 + 9\times7 + 10\times5 + 11\times8 + 12\times8 + 13\times3 + 14\times6 + 15\times3 + 16\times ...)$$

$$\bar{x} = \frac{555}{52} = 10,67$$

6). Déterminer la valeur de la médiane m_e

La médiane est la valeur de la variable qui divise la population en 2 parties

$F(x_i) < 0.5$, $F(x_{i+1}) \geq 0.5$
avec x_{i+1} > x_i directement

On a $\begin{cases} F(10) = \frac{23}{52} < 0.5 \\ F(11) = \frac{31}{52} \geq 0.5 \end{cases}$

Donc $\boxed{m_e = 11}$

7) Calculer la variance

$$V(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

$N = 52$, $n = 12$

$\rightarrow \boxed{V(x) = 7,64}$

Calculer l'écart-type

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$$

$$\boxed{\sigma(x) = 2,76}$$

14.06.2021

Exercice 3

1) La moyenne

Grp A. $$\bar{x}_A = \frac{1}{N_A} \sum_{i=1}^{4} n_i x_i$$
$$= \frac{1}{6} (2\times7 + 2\times9 + 1\times10 + 1\times11)$$
$$\boxed{\bar{x}_A = 9,17}$$

Grp B $$\bar{x}_B = \frac{1}{N_B} (2\times6 + 1\times7 + 1\times9 + 1\times13 + 1\times14)$$
$$= \frac{1}{7} (\quad)$$
$$\boxed{\bar{x}_B = 9,12}$$

2) L'écart type

Grp A $\sigma_A = \sqrt{V_A}$:

avec $$V_A = \frac{1}{N_A} (2\times7^2 + 2\times9^2 + 1\times10^2 + 1\times11^2) - (9,17)^2$$
$$= \frac{1}{6} (128 + 162 + 100 + 121) - (9,17)^2$$
$$= \frac{1}{6} \cdot 511 - (9,17)^2$$

$V_A = 1,07$

Donc $\boxed{\sigma_A = \sqrt{V_A} = 1,03}$

Grp B $\sigma_B = \sqrt{V_B}$

avec $$V_B = \frac{1}{N_B} \sum_{i=1}^{5} n_i x_i^2 - \bar{x}_B^2$$
$$= \frac{1}{7} (2\times6^2 + 1\times8^2 + 1\times9^2 + 1\times13^2 + 1\times14^2) - (9,12)^2$$
$$= \frac{1}{7} (72 + 128 + 162 + 169 + 196) - (9,12)^2$$

$V_B = 7,7$

Donc $\boxed{\sigma_B = \sqrt{7,7} = 2,8}$

2) On remarque que les 2 groupes A et B ont des moyennes quasiment identiques.

Les notes du groupe B sont dispersées autour de la moyenne que les notes du groupe A. car $\sigma_B > \sigma_A$.

Exercice 4 :

1)
- La population est : le 100 tubes.
- L'individu est : le tube.
- Le caractère est : le diamètre.
- Le type de la variable est : quantitative continue.

2) ①. Par la méthode de Yule.

$$P = 2,5\sqrt[4]{N} = 2,5 \cdot \sqrt[4]{100} = 2,5 \times \sqrt{10} = 7,9 \text{ (plus proche 8)}$$

Donc $p = 8$ c'est le nbr de classes.

. 2 la méthode de Sturge $\quad \log_2 a = \frac{\ln a}{\ln 2}$

$$P = 1 + 3,3 \log_{10}(N) = 3,3 \log_{10}(100) + 1 = 7,6 \approx 8$$

Donc $p = 8$ c'est le nbr de classes.

② l'amplitude a est :

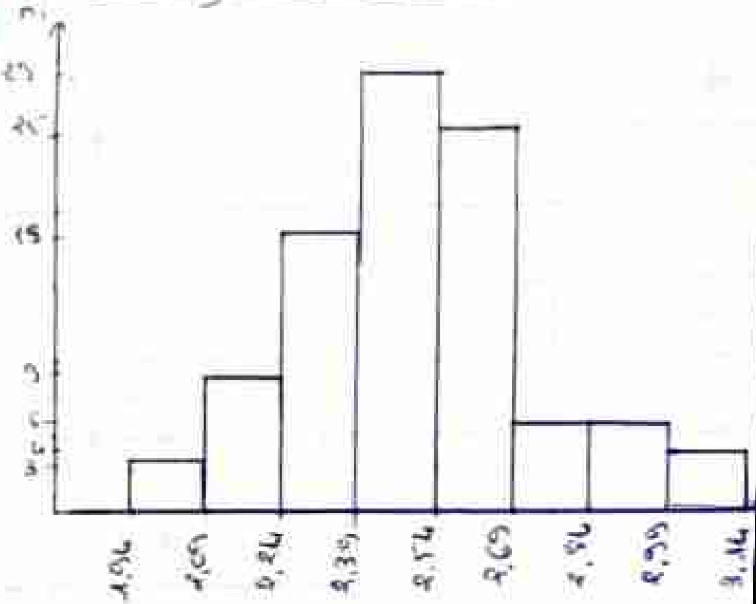
$$a = \frac{x_{max} - x_{min}}{P} = \frac{3,12 - 1,94}{8}$$

$$\boxed{a = 0,15}$$

3) Le tableau statistique est :

x	n_i	f_i	N_i	F_i
[1,94 ; 2,09[	3	0,03	3	0,03
[2,09 ; 2,24[	9	0,09	12	0,12
[2,24 ; 2,39[	18	0,18	30	0,3
[2,39 ; 2,54[	29	0,29	59	0,59
[2,54 ; 2,69[	25	0,25	84	0,84
[2,69 ; 2,84[	6	0,06	90	0,9
[2,84 ; 2,99[	6	0,06	96	0,96
[2,99 ; 3,14[	4	0,04	100	1
Σ	100			

3) L'histogramme de cette variable.



4) On a $F(2,24) = 0,3$ (F : fréquences cumulées)

et $F(2,39) = 0,59$

2,24 — me — 2,39

0,3 — 0,5 — 0,59

$$\frac{2,39 - 2,24}{0,59 - 0,3} = \frac{me - 2,24}{0,5 - 0,3}$$

$$\Rightarrow me = 2,24 + \frac{(2,39 - 2,24)(0,5 - 0,3)}{0,59 - 0,3}$$

$$\boxed{me = 2,34}$$

... au niveau de la médiane.

5) $2,58 \in [2,54 ; 2,69[$

et $F(2,54) = 0,84$ et $F(2,69) = 0,9$

2,54	2,58	2,69
0,84	x	0,9

$$\frac{2,69 - 2,54}{0,9 - 0,84} = \frac{2,58 - 2,54}{x - 0,84}$$

$$\Rightarrow x = 0,84 + \frac{(2,58 - 2,54)(0,9 - 0,84)}{2,69 - 2,54}$$

$$x = 0,85$$

Donc le pourcentage est 85 %.

Exercice 5

1) Le tableau statistique est

x	n_i	c_i	N	f	F
[4,6[	20	5	20	0,1	0,1
[6,8[	40	7	60	0,2	0,3
[8,10[	80	9	140	0,4	0,7
[10,15[	30	12,5	170	0,15	0,85
[15,20[	20	17,5	190	0,1	0,95
[20,30[	10	25	200	0,05	1

1) La moyenne est $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} n_i c_i$$

$$= \frac{1}{20} (20 \times 5 + 40 \times 7 + 80 \times 9 + 30 \times 12,5 + 20 \times 17,5 + 10 \times 25)$$

$$\boxed{\bar{x} = 10,37}$$

* l'écart type $\sigma = \sqrt{V}$

et $V = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{n} n_i c_i^2 - \bar{x}^2 \right)$

* Les quantiles

• x_i / Q_1 tel que x_q $F(x_i) \leq 0,25 \leq F(x_{i+1})$

$F(4) = 0,1 \leq 0,25 \leq F(6) = 0,3$

4	Q_1	6
0,1	0,25	0,3

$$\frac{6 - 4}{0,3 - 0,1} = \frac{Q_1 - 4}{0,25 - 0,1}$$

$$\Rightarrow Q_1 = 4 + \frac{(6 - 4)(0,25 - 0,1)}{0,3 - 0,1}$$

$$\boxed{Q_1 = 5,5}$$

• $F(6) = 0,3 \leq 0,5 \leq F(8) = 0,7$

6	Q_2	8
0,3	0,5	0,7

$$\frac{8 - 6}{0,7 - 0,3} = \frac{Q_2 - 6}{0,5 - 0,3}$$

$$\Rightarrow Q_2 = 6 + \frac{(0,5 - 0,3)(8 - 6)}{0,7 - 0,3}$$

$$\boxed{Q_2 = 7}$$

• $F(8) = 0,7 \leq 0,75 \leq F(10) = 0,85$

8	Q_3	10
0,7	0,75	0,85

$$\frac{10 - 8}{0,85 - 0,7} = \frac{Q_3 - 8}{0,75 - 0,7}$$

$$\Rightarrow Q_3 = 8 + \frac{(10 - 8)(0,75 - 0,7)}{0,85 - 0,7}$$

$= 1 - (0{,}2650 + P(X=4))$

$= 1 - \left(0{,}1650 + e^{-5} \cdot \frac{5^4}{4!}\right)$

$\boxed{= 0{,}5595}$

$- P\left(\frac{\pi}{2} \leq X \leq 2\pi\right)$ ~~P(X...)~~

$= P(4 \leq X \leq 6)$

$= P(X \leq 6) - P(X \leq 4)$

Donc

$P\left(\frac{\pi}{2} \leq X \leq 2\pi\right) = P(X \leq 5) + P(X=1) - P(X=4)$

$- P(X=0) - P(X=3)$

$= 1 - P(X \geq 5) + P(X=1) + P(X=4)$

$- P(X=0) - P(X=3)$

$= 1 - P(X \geq 5) + P(X=1) + P(X=4)$

$- P(X=0) - P(X=3)$

$= 0{,}7418$

31.05.2021

Exercice 5:

$X \sim B(n, p)$

$P(X=k) = C_n^k \, p^k \, (1-p)^{n-k}$

1) $n = 5 \quad p = \frac{2}{3}$

$P(X \geq 5) = P(X=5)$

$= C_5^5 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5-5}$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^5$

$P(X \geq 5) = 0{,}13$

2) $n = 8 \quad , \quad p = \frac{2}{3}$

$P(X \geq 5) = P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) + P(X=8)$

$= C_8^5 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right)^3 + C_8^6 \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + C_8^7 \left(\frac{2}{3}\right)^7 \left(\frac{1}{3}\right)$

$+ C_8^8 \left(\frac{2}{3}\right)^8 \left(\frac{1}{3}\right)^0$

$P(X \geq 5) = 0{,}74$

Exercice 6:

$\lambda e^{-\lambda x}$ (1)

forme $\lambda e^{-\lambda x}$

$f(x) = \frac{1}{8} e^{-x/8}, \quad x \geq 0$

Donc f cette fct est la loi exponentielle de paramètre $1/8$

Donc $X \sim \mathcal{E}(1/8)$

1) $P(X > 1) = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$

$= \int_8^{+\infty} \frac{1}{8} e^{-x/8}\,dx$

$= \left[-e^{-x/8}\right]_8^{+\infty}$

$= -0 - e^{-1}$

$P(X > 1) = 0{,}37$

$P(X=a) = 0$ continue

2) $P(X > 10 / X > 2) = \frac{P(X > 10 \cap X > 2)}{P(X > 2)}$

$= \frac{P(X > 10)}{P(X > 2)}$

$= \frac{\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{8} e^{-x/8}\,dx}{\int_2^{+\infty} \frac{1}{8} e^{-x/8}\,dx}$

$= \frac{\left[-e^{-x/8}\right]_{10}^{+\infty}}{\left[-e^{-x/8}\right]_2^{+\infty}}$

$= \frac{e^{-10/8}}{e^{-2/8}}$

$= e^{-10/8 + 2/8}$

$= e^{-1}$

$P(X > 10 / X > 2) = 0{,}37$

Conclusion

TD 1

07.06.2011

Exercice 1 :

1) • La population est les 40 personnes $\boxed{N = 40}$

• La variable statistique est le groupe sanguin.

• La variable statistique est de type qualitative → car la variable est des lettres

2) Déterminons l'effectif du grp AB n_3

L'effectif total est $N = 40$

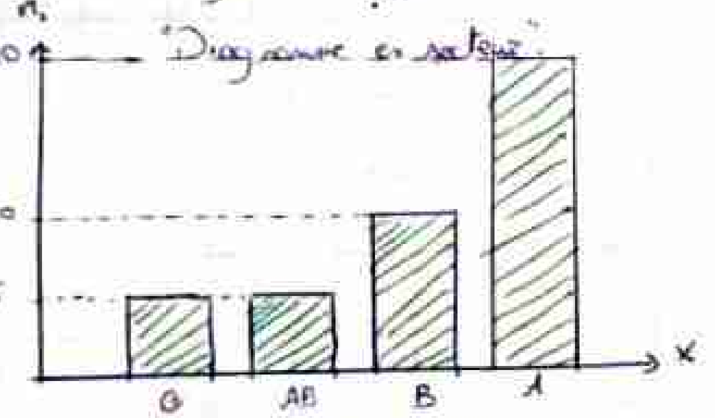
Donc $N = 40 = 20 + 10 + n_3 + 5$

$\Rightarrow \boxed{n_3 = 5}$

3) Les représentations graphiques possibles sont :

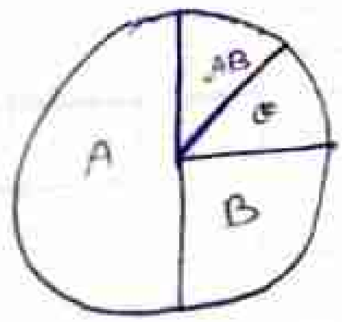
– Tuyaux d'orgue.

– Diagramme en secteur.



Tuyaux d'orgue

$\alpha_i = f_i \cdot 360$
$= \frac{n_i}{N} \cdot 360$



$\alpha_A = \frac{20}{40} \cdot 360$
$\boxed{= 180°}$

$\alpha_B = \frac{10}{40} \cdot 360$
$\boxed{= 90°}$

$\alpha_{AB} = \frac{5}{40} \cdot 360$
$\boxed{= 45°}$

Diagramme en secteur

$\alpha_O = \frac{5}{40} \cdot 360 \boxed{45°}$

Exercice 2

1) La population est 52 jours $N = 52$

La variable statistique est le nbr d'autos vendues / jrs.

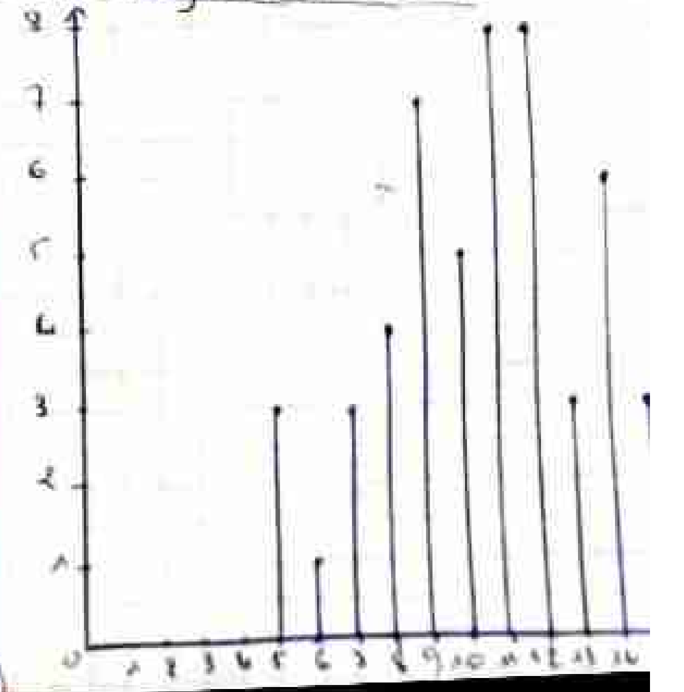
C'est une variable quantitative discrète

2) Déterminons le tableau.

x_i	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n_i	3	1	3	4	7	5	8	8	3
f_i	3/52	1/52	3/52	4/52	7/52	5/52	8/52	8/52	3/[illegible]
N_i	3	4	7	11	18	23	31	39	4[illegible]
F_i	3/52	4/52	7/52	11/52	18/52	23/52	31/52	39/52	4[illegible]

14	15	16	Σ
6	3	1	52
6/52	3/52	1/52	1
48	51	52	
48/52	51/52	52/52	

3) Le diagramme à bâton.



$E(X)$ la durée de vie moyenne.
$E(X)$ d'une télévision

- $E(X) = \int_0^{+\infty} x f(x)\, dx$

$= \int_0^{+\infty} \frac{x}{8} e^{-x/8}\, dx$

On procède intégration par partie.

$E(X) = \left[-x e^{-x/8}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x/8}\, dx$

$= 0 + \left[-8 e^{-x/8}\right]_0^{+\infty}$

$= 0 + 8$

$E(X) = 8$ $\longrightarrow$ $E(X) = 1/\lambda = 1/\frac{1}{8} = 8$

- La variance

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$+\int_0^{+\infty}$

On a

$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$

$= \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{8} e^{-x/8}\, dx$

$= \left[-x^2 e^{-x/8}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x e^{-x/8}\, dx$

$= \left[-x^2 e^{-x/8}\right]_0^{+\infty} + 2\times 8 \int_0^{+\infty} \frac{x}{8} e^{-x/8}\, dx$

$= 0 + 16E(X)$

$E(X^2) = 16 \times 8 = 128$

Donc :

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$V(X) = 128 - 8^2 = 64$

$V(X) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \left(1/\frac{1}{8}\right)^2 = 8^2 = 64.$

Exercice 7

On a $X \sim N(m, \sigma^2)$

$\Rightarrow X \sim N(72, 64)$

1) $T = \frac{X - m}{\sigma} \sim N(0,1)$

$P(X>80) = P\left(\frac{X-72}{8} > \frac{80-72}{8}\right)$

$= P(Z>1)$ avec $Z = \frac{X-72}{8} \sim N(0,1)$

$= 1 - P(Z<1)$

$= 1 - 0,84134$

$P(X>80) = 0,15866$

$\simeq 16$

Le pourcentage est 16 %

2) $P(X>100 / X>80) = \frac{P(X>100 \cap X>80)}{P(X>80)}$

$= \frac{P(X>100)}{P(X>80)}$

$= \frac{P\left(\frac{X-72}{8} > \frac{100-72}{8}\right)}{P\left(\frac{X-72}{8} > \frac{80-72}{8}\right)}$

$= \frac{P(Z>3,5)}{P(Z>1)}$ avec $Z \sim N(0,1)$

$= \frac{1 - P(Z<3,5)}{1 - P(Z<1)}$

$= \frac{1 - 0,99993}{1 - 0,84134}$

$\simeq 0$

La probabilité est presque nulle.

$P(X > 1,1) = P(X > 1,1)$

$= 1 - P(X < 1,1)$